Colle du 09/03 - Sujet 1
Espaces vectoriels et dimension

Question de cours. Démontrer la caractérisation de la somme directe par le théorème des bases adaptées.

Exercice 1. Soient $t \in \mathbb{R}$, $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y - tz = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((1,2,1)\right)$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de t une base de F, $F \cap G$ et $F + G$.
2. Les espaces F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $P_0, \ldots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, a est une racine de multiplicité d'ordre k exactement de P_k. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 09/03 - Sujet 2
Espaces vectoriels et dimension

Question de cours. Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $F = \{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = 0_n \}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. On suppose désormais que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on définit par récurrence $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $k \in [\![0;n-2]\!]$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Montrer que $(T_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Colle de mathématiques PTSI1 2022-2023

Colle du 09/03 - Sujet 3
Espaces vectoriels et dimension

Question de cours. Démontrer la caractérisation de la somme directe par l'intersection.

Exercice 1. Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P - XP' = 0 \}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de F.
3. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $F = \{ P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \mid P(-X) = P(X) \}$ et $G = \left\{ XP\left(X^2\right) \;\middle|\; P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Montrer que $F \oplus G$.
3. Déterminer une base de F puis de G.
4. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}_{2n}[X]$.